001351

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்/ Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2000 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப்பத்திர(உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2000 ஆகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 2000

ගණිතය II
கணிதம் II
Mathematis II

07	
S	II

පැය තුනයි / மூன்று மணித்தியாலம் / Three hours

ප්‍රශ්න අටකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. (*a*) ප්‍රසාරණය නොකර, පහත දැක්වෙන එක් එක් නිර්ණායක ශුන්‍යයට සම බව පෙන්වන්න.

(i) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2-bc \\ 1 & b & b^2-ca \\ 1 & c & c^2-ab \end{vmatrix}$, (ii) $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$.

(*b*) සුගම පේළි පරිණාමන මගින් $\Delta(x)=\begin{vmatrix} x+3 & -1 & 1 \\ 5 & x-3 & 1 \\ 6 & -6 & x+4 \end{vmatrix}$ නිර්ණායකය $\left(x^2+px+q\right)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x+r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

ආකාරයට ඌනනය කරන්න, මෙහි p, q, r නිර්ණය කළ යුතු වේ.

ඒ නයින්, $\Delta(x)=0$ හි මූල සියල්ල සොයන්න.

2. ඩීසල් මගින් දිවෙන ලොරි 5 ක් ද, පැට්‍රල් මගින් දිවෙන වෑන් රථ 10 ක් ද ඇති ප්‍රවාහන සමාගමක් බඩු පෙට්ටි 1120 ක් ප්‍රවාහනය කිරීමට භාරගනු ලබයි. වරකට ලොරියකට උපරිම වශයෙන් බඩු පෙට්ටි 200 ක් ගෙන යා හැකි අතර වෑන් රථයකට උපරිම වශයෙන් බඩු පෙට්ටි 80 ක් ගෙන යා හැක. එක ගමනකට ලොරියක ධාවන පිරිවැය රු. 4000 ක් වන අතර වෑන් රථයක ධාවන පිරිවැය රු. 2000 ක් වේ. මුළු මෙහෙයුමට ම උපරිම වශයෙන් රු. 30 000 වෙන් කර ඇත. තව ද, මෙහෙයුමට යොදවන ලොරි ප්‍රමාණය, ඊට යොදවන වෑන් රථ ප්‍රමාණය නොඉක්මවීම සමාගමේ අවශ්‍යතාවයකි.

අරමුණ වන්නේ ප්‍රවාහන පිරිවැය අවම කිරීම නම් මෙහෙයුමට කොපමණ ලොරි සහ කොපමණ වෑන් රථ ප්‍රමාණයක් යෙදවිය යුතු ද?

ඩීසල් මිල ඉහළ යෑම නිසා ලොරියක ධාවන පිරිවැය රු. 5500 තෙක් ඉහළ ගියේ නම් පෙර තිබූ අරමුණට ම අනුකූල ව, දැන්, කොපමණ ලොරි සහ කොපමණ වෑන් රථ ප්‍රමාණයක් යෙදවිය යුතු ද?

3. (*a*) $\dfrac{x-1}{x+1} > 2$ වන x හි අගය කුලකය සොයන්න.

(*b*) $|5x+1| < x^2+5$ වීජීය ව විසඳන්න.

දළ රූප සටහනක, $|5x+1| \le y \le x^2+5$ තෘප්ත කරන පෙදෙස අඳුරු කර දක්වන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

4. (a) $f(r)=(r-1)^2r$ නම් r ඇසුරෙන් $f(r+1)-f(r)$ ලබාගන්න.

ඒ නයින්

$$\left(3.1^2-1\right)+\left(3.2^2-2\right)+\left(3.3^2-3\right)+\ \ldots\ +\left(3.r^2-r\right)+\ldots$$

ශ්‍රේණියේ මුල් n පද වල ඓක්‍යය ලබා ගන්න.

(b) S_n මගින්

$$1.1+2.2+3.2^2+\ldots+r.2^{r-1}+\ldots$$

ශ්‍රේණියේ මුල් n පද වල ඓක්‍යය දක්වමු.

ගණිතමය අභ්‍යුහනයෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $S_n=(n-1)\,2^n+1$ බව සාධනය කරන්න.

$S_n>1000$ වන n හි කුඩාම අගය සොයන්න.

5. පැති n සහිත සවිධි බහු අස්‍රයක් සලකන්න.

(i) බහු අස්‍රයට විකර්ණ කොපමණ තිබේ ද? විකර්ණ මෙන් දෙගුණයක් පැති ඇත්තේ නම් n හි අගය කුමක් ද?

(ii) බහු අස්‍රයේ ශීර්ෂ, ශීර්ෂ ලෙස ඇති ත්‍රිකෝණ කොපමණ තිබේ ද?

(iii) ඉහත (ii) හි ත්‍රිකෝණ අතුරින් කොපමණක හරියටම එක පැත්තක් බහු අස්‍රයේ පැත්තක් සමග සම්පාත වේ ද?

(iv) ඉහත (ii) හි ත්‍රිකෝණ අතුරින් කොපමණක පැති දෙකක් බහු අස්‍රයේ පැති දෙකක් සමග සම්පාත වේ ද?

$n>3$ නම් ශීර්ෂ, බහු අස්‍රයේ ශීර්ෂ ද පැති, බහු අස්‍රයේ විකර්ණ ද වන ත්‍රිකෝණ සංඛ්‍යාව $\dfrac{n}{6}(n-4)(n-5)$ බව අපෝහනය කරන්න.

6. (a) $f(x)=\left(1+x-ax^2\right)^5$ ලෙස ගනිමු; මෙහි a යනු තාත්වික නියතයකි.

x හි ආරෝහණ බලවලින් බහුපදයක් ලෙස $f(x)$ ප්‍රසාරණය කළ විට $i=1,2,\ldots,10$ සඳහා x^i හි සංගුණකය c_i ලෙස ගනිමු.

(i) c_3 සොයන්න.

(ii) $c_1-c_2+c_3-c_4+\ldots-c_{10}=1+a^5$ බව පෙන්වන්න.

(b) එක්තරා විද්‍යාලයක එක්-අවුරුදු ඩිප්ලෝමා පාඨමාලාවක් සෑම වසරකම ජනවාරි 1 වෙනි ද පටන්ගෙන දෙසැම්බර් 31 වෙනි ද අවසන් කෙරේ. ඕනෑම වසරක ජනවාරි 1 වෙනි ද ලියාපදිංචි වන ශිෂ්‍ය සංඛ්‍යාව ඊට පෙර වසරේ දෙසැම්බර් 31 වෙනිද ලියාපදිංචි වී සිටි ශිෂ්‍ය සංඛ්‍යාවට වඩා 10% කින් අඩු බව නිමානය කර ඇත. එමෙන් ම, සෑම වසරක ම ජනවාරි 2 වෙනිද සිට (එම වසරේම) පෙබරවාරි 1 වෙනිද දක්වා වූ කාලසීමාව තුළ තවත් ශිෂ්‍යයන් 10 දෙනෙකු පාඨ මාලාවට ලියාපදිංචි වන බව නිමානය කර ඇත.

(i) අනුයාත වසර දෙකක පෙබරවාරි 2 වෙනි ද වන විට පාඨමාලාවට ලියාපදිංචි වී ඇති ශිෂ්‍ය සංඛ්‍යා සම්බන්ධ කරන ඒකජ අන්තර සමීකරණයක් ලබාගන්න.

(ii) 1995 ජනවාරි 1 වෙනි ද ශිෂ්‍ය ලියාපදිංචිය 200 ක් වූනි නම් 2005 පෙබරවාරි 2 වෙනි ද වන විට එම වසර සඳහා පාඨමාලාවට ලියාපදිංචිවන්නා වූ ශිෂ්‍ය සංඛ්‍යාව කොපමණ වේ දැයි නිමානය කරන්න.

[$(0{\cdot}9)^{10}=0{\cdot}345$ බව උපකල්පනය කළ හැක.]

7. $f(x) = (x-1)^2 (a - bx)$ ලෙස ගනිමු; මෙහි a සහ b යනු $0 < b < a$ පරිදි වූ තාත්ත්වික නියත වේ. 1 සහ $\frac{2a+b}{3b}$ අතර x පවතින විට පමණක් $f'(x)$ ධන වන බව පෙන්වන්න.

$(x-1)^2 (7-2x)$ හි උපරිම සහ අවම අගයයන් සොයා $y = (x-1)^2 (7-2x)$ වක්‍රයේ කටු සටහනක් අඳින්න.

$(x-1)^2 (7-2x) = k^3$ සමීකරණයට තාත්ත්වික මූල තුනක් තිබීම සඳහා k ට තිබිය හැකි අගයයන් සොයන්න.

8. (a) $\frac{7x^2+13x+4}{(x+1)^2 (x+2)} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+2}$ වන පරිදි A, B, C නියත නිර්ණය කරන්න.

ඒ නයින් $\int_0^1 \frac{7x^2+13x+4}{(x+1)^2 (x+2)} dx$ අගයන්න.

(b) $\int \sin^3 x \, dx$ සොයන්න.

(c) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය කිරීමේ ක්‍රමය භාවිතයෙන්

$\int_0^{\pi/2} x^2 \cos x \, dx$ ලබාගන්න.

9. (a) සිම්සන් නීතිය සහ ත්‍රපීසාභ නීතිය ප්‍රකාශ කරන්න.

පහත දක්වෙන වගුවේ දෙන අගයයන් $f(x)$ ගත්තා විට සිම්සන් නීතිය මගින් $\int_0^1 f(x)\,dx$ සඳහා දළ අගයක් ලබාගන්න.

x	0	0·25	0·50	0·75	1·00
$f(x)$	0·1240	0·8409	1·0000	0·8409	0·1240

ත්‍රපීසාභ නීතිය භාවිතයෙන් එම අනුකලයම ගණනය කරන්න.

(b) $x^3 + 6x^2 - 18x - 16 = 0$ සමීකරණයේ $1 + \sqrt{3}$ මූලයක් බව සත්‍යාපනය කර, m සහ n පූර්ණ සංඛ්‍යා වූ $m + \sqrt{n}$ ආකාරයේ තවත් මූලයක් ලියන්න.

ඒ නයින්, $x^3 + 6x^2 - 18x - 16 = 0$ හි මූල සියල්ල සොයන්න.

10. (*a*) $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 25$ වෘත්තය මූල ලක්ෂ්‍යය වන O හරහා යන බව සත්‍යාපනය කරන්න. O හරහා ඇඳි විෂ්කම්භයේ අනිත් කෙළවර වන A හි ඛණ්ඩාංක සහ A හි දී වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය සොයන්න.

ඉහත සඳහන් වෘත්තය B හි දී x-අක්ෂයත්, C හි දී y-අක්ෂයත් ඡේදනය කරයි නම් BC හි සමීකරණය සොයා, BC විෂ්කම්භයක් බව අපෝහනය කරන්න.

(*b*) A සහ B ලක්ෂ්‍ය දෙකෙහි ධ්‍රැවක ඛණ්ඩාංක පිළිවෙළින් $(1, 0)$ සහ $(1, \pi)$ වේ. $P(r, \theta)$ ලක්ෂ්‍යය $AP.BP = 1$ වන පරිදි වේ.

$r^2 = 2\cos 2\theta$ බව පෙන්වන්න.

11. (*a*) $\sin 4\theta \cos 2\theta = \sin 5\theta \cos 3\theta$ සමීකරණය තෘප්ත කරන $\dfrac{\pi}{2}$ ට අඩු θ හි සියලු ධන අගයයන් සොයන්න.

(*b*) $5\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta - 3 = 0$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම ලබාගන්න.

(*c*) $-\dfrac{5\pi}{4} \le x \le \dfrac{3\pi}{4}$ සඳහා $y = \cos x + \sin x$ හි ප්‍රස්තාරය අඳින්න.

$\cos x + \sin x = \dfrac{4\sqrt{2}}{\pi} x$ සමීකරණයේ එකම මූලය $x = \dfrac{\pi}{4}$ බව අපෝහනය කරන්න.

12. A සහ B යනුවෙන් බඳුන් දෙකක් ඇත. A බඳුනේ සුදුපාට බෝල දෙකක් ද, B බඳුනේ සුදුපාට බෝල තුනක් සහ රතුපාට බෝලයක් ද ඇත.

තැහැසුමක්, එක් එක් බඳුනින් බෝලය බැගින් ඉවතට ගෙන, ඒවා දෙස නොබලා, අතුරුමාරු කර, බඳුන්වලට ආපසු දැමීමෙන්, සමන්විත වේ. තැහැසුම කිහිප වරක් පුනරාවර්තනය කරන අතර n වන තැහැසුමට පසු රතුපාට බෝලයේ පිහිටුම X_n මගින් දක්වමු.

(*a*) මුල් අනුයාත තැහැසුම් තුනේ දී රතුපාට බෝලයේ පිහිටීම සඳහා සම්භාවිතා රුක් සටහනක් අඳින්න.

(*b*) $n = 1, 2, 3, \dots$ සඳහා $\{X_n\}$ යන්න "A තුළ ඇත." සහ "B තුළ ඇත." යන අවස්ථා සහිත ද්වි-අවස්ථා මර්කොෆ් දාමයක් ලෙස සලකා $\{X_n\}$ හි $\mathbf{T}$ ඒක-පියවර සංක්‍රමණ න්‍යාසය ලියන්න.

(*c*) n වන තැහැසුමට පසු රතු පාට බෝලය A තුළ තිබීමේ සම්භාවිතාව p_n ලෙස ගනිමු.

(i) $(p_{n+1} \;\; q_{n+1}) = (p_n \;\; q_n)\mathbf{T}$; මෙහි $q_n = 1 - p_n$ වේ.

(ii) $4p_{n+1} = p_n + 1$,

බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, n අනන්තය කරා එළැඹෙන විට p_n සහ q_n හි සීමාකාරී අගයයන් ලබාගන්න.